

# 무선 통신 시스템의 성능 평가를 위한 Ordered Gamma RV의 부분 합에 대한 연구

한재은, 남성식<sup>°</sup>, 최세영<sup>\*°</sup>

가천대학교, \*원광대학교

jaeunhan@gachon.ac.kr, ssnam@gachon.ac.kr, \*sychoi@wku.ac.kr

(<sup>°</sup>공동교신저자)

## A study on partial sum of ordered Gamma RVs for performance evaluation of wireless communication

Jae Eun Han, Sung Sik Nam<sup>°</sup>, Seyeong Choi<sup>\*°</sup>

Gachon Univ., \*Wonkwang Univ.

(<sup>°</sup>Co-corresponding Authors)

### 요 약

표본을 취하여 크기의 순서대로 배열한 값들을 순서통계량이라고 한다. 최근 순서통계량은 무선 통신 시스템의 분석 및 설계에 점점 더 많이 활용이 되고 있는 추세이다. 본 연구에서는 좀 더 고차원적인 순서통계량을 이용해야 하는 통신시스템의 경우 그 동안 연구되어온 순서통계량을 어떤 식으로 적용하고 활용할 수 있는지에 대한 연구 방향과 그 유도 결과를 제시하고자 한다.

### I. 서 론

순서통계량(Order Statistics)은 크기순으로 나열된 랜덤 변수(RV)의 속성과 분포를 다루는데 아주 중요한 역할을 하고 있는 분야이다 [1]. 특히, 수명 테스트, 품질 관리, 신호 및 이미지 처리를 포함한 통계학적 이론과 실제의 많은 영역에서 그 응용 범위가 아주 넓다고 할 수 있다. 최근 순서통계량은 무선 통신 시스템의 분석 및 설계에 점점 더 많이 활용이 되고 있는 추세이다. 특히, 통신 시스템 및 알고리즘의 복잡성이 증가함에 따라 주어진 페이딩 환경에서 Ordered RV를 기반으로 한 통계 분석이 점점 더 중요해지고 있다. 그러나 원래의 non-Ordered RV가 독립적이더라도 Ordered RV는 서로 종속적이어서 joint statistics를 분석하기가 매우 어려운데 그 이유는 Ordered RV의 부분합의 확률밀도함수(PDF)나 모멘트 생성함수(MGF)와 같은 통계 결과를 얻는 것이 모든 변수가 Ordered 된 RV의 합이나 또는 best-Ordered 된 RV의 합에 비해 훨씬 까다롭기 때문이다. 이 연구에서는 [2][3]에서 제시된 부분합의 joint statistics를 구하기 위한 통합된 분석 프레임워크를 활용하여 감마 분포를 따르는 RV의 부분합의 통계적 특성을 정확한 수식으로 유도하고자 한다.

### II. 본론

참고문헌 [4][5]에서 제시된 distributed-cyclic delay diversity (d-CDD) 기반의 cyclic prefix single carrier (CP-SC) 시스템 모델에 따라  $M$  개의 단일 안테나 송신기와 한 개의 안테나를 가진 수신기를 가정하자. 이 시스템의 경우 데이터 전송을 위해  $K$  ( $K < M$ )개의 CDD 송신기만 선택이 된다. 알려진 파일럿 심볼을 통하여 이  $K$  개의 선택은 수신기에서  $k$  번째 송신기로부터 수신된 각 신호대 잡음비 (SNR),  $\gamma_k$ , 를 측정한다. 그 중 가장 큰  $K$  개를 선택하여 수행된다.

$S$ 를  $K$  개의 선택된 송신기로부터 수신된 SNR의 합이라고 하면,  $S$ 는  $M$

개의 송신기로부터 수신된 SNR 중에서 가장 큰  $K$  개의 합이다. 즉,

$S = \sum_{k=1}^K S_{k:M}$ 이 된다. 여기서  $S_{k:M}$ 은  $k$  번째 순서통계량이다. 따라서

$S$ 는 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$S = \sum_{k=1}^K S_{k:M} = \sum_{k=1}^K I_k \gamma_k \quad (1)$$

위 식에서  $I_k$ 는  $\Pr(I_k = 1) = p_k$  인 indication 함수를 나타내며 베르누이 프로세스에 의하여  $S_{k:M}$ 의 확률밀도함수 (PDF)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{S_{k:M}}(x) = (1 - p_k)\delta(x) + p_k f_{\gamma_k}(x) \quad (2)$$

본 연구에서는 distributed 시스템을 고려하기 때문에 대규모 페이딩에서 서로 다른 경로 손실 모델을 가정하였으며 각 채널이 independent but non-identically distributed (i.n.i.d) 주파수 선택적 페이딩을 경험하는 한, 각  $\gamma_k$ 는 서로 다른 수의 다중 경로 구성요소로 구성된다. 따라서 주파수 선택 페이딩 채널의 경우 (2)에서  $\gamma_k$ 의 PDF는 다음과 같다.

$$f_{\gamma_k}(x) = \frac{x^{m_k-1} \exp\left(-\frac{x}{\eta_k}\right)}{\Gamma(m_k) \eta_k^{m_k}} \quad (3)$$

위 식에서  $m_k$ 는  $k$  번째 채널의 multipath components의 개수이며  $\Gamma(\cdot)$ 는 complete gamma function이다.

본 연구의 궁극적인 목표는 식 (1)로 표현된 수신 SNR의 통계적 특성을 구하는

것이며 그 중에서도  $S$ 의 PDF를 일반적인 closed-form으로 구하는 것이라고 할 수 있다. 이를 위해 참고문헌 [2][3]에서 제안된 접근 방식의 도움으로 통합 분석 프레임워크를 도입하였으며 순서통계량의 부분합의 joint statistics를 MGF와 PDF 측면에서 유도할 수 있다. 이를 통해 기타 다른 채널의 페이딩을 통한 무선 통신 시스템의 성능 분석에 사용할 수 있는 새롭고 통찰력 있는 통계 결과를 제공하고자 한다.

### III. 결론

$Z_1 = \sum_{k=1}^{K-1} S_{k:M}$  이고  $Z_2 = S_{K:M}$  이라고 놓으면 우리가 목표로 하는 통계적 결과는  $Z' = Z_1 + Z_2$ 이 되고  $Z'$ 의 PDF는  $Z_1$ 과  $Z_2$ 의 joint PDF로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_{Z'} = \int_0^x f_Z(x - z_2, z_2) dz_2 \quad (4)$$

일반적으로 RV의 합에 적용된 기존의 MGF 기반 접근방식과 유사하게  $Z_1$ 과  $Z_2$ 와 같은 ordered RV에 대한 결과를 도출하기 위해 기존의 MGF 기반 접근법을 사용한다면 아래와 같이 다중 적분식을 포함하는 매우 복잡한 MGF 표현식을 다뤄야한다.

$$\begin{aligned} MGF_Z(\lambda_1, \lambda_2) &= E\{\exp(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)\} \\ &= F \int_0^\infty dS_{1:K} f_{S_{1:K}}(S_{1:K}) \exp(\lambda_1 S_{1:K}) \cdots \\ &\times \int_0^{S_{K-2:M}} dS_{K-1:M} f_{S_{K-1:M}}(S_{K-1:M}) \exp(\lambda_1 S_{K-1:M}) \\ &\times \int_0^{S_{K-1:M}} dS_{K:M} f_{S_{K:M}}(S_{K:M}) \exp(\lambda_2 S_{K:M}) [c(S_{K:M})]^{M-K} \end{aligned} \quad (5)$$

본 연구에서는 [2]에서 제시된 분석적인 프레임워크를 사용하여 ordered RV의 임의의 부분 합에 대한 2차원 joint PDF를 closed-form으로 구할 수 있다. 구체적으로는, 1단계에서 2차원 joint MGF 결과의 해석적 표현을 도출한 후, 2단계에서 2차원 joint PDF를 얻기 위해 역 라플라스 변환 (Laplace Transform, LT)을 적용한다. 위의 과정을 반복적으로 실시하여 원하는 최종  $S$ 의 PDF를 구할 수 있다. 그림 1은  $M=6$ 이고  $\gamma_k$ 의 평균 SNR  $\bar{\gamma} = 1$  일 때  $K$ 의 다양한 값에 대한  $S$ 의 PDF를 보여주고 있다. 본 연구에서 도출된 모든 분석 결과는 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하여 비교 검증하였다. 그림 1 (b)에서는 지수 분포, 즉 Rayleigh 분포에 해당하는  $m_k = 1$ 라는 특수한 경우를 보여주고 있음을 확인할 수 있다. 그림 1 (a),(b)로부터  $M=K=6$ 일 때 각각 Nakagami 및 Rayleigh 페이딩 환경에서 최대비 합성 (MRC)의 결과와 일치하고 있음을 확인할 수 있으며  $K=1$ 일 때는, 각각 Nakagami 및 Rayleigh 페이딩 환경에서 선택적 합성 (SC)의 결과와 일치함을 볼 수 있다.

### ACKNOWLEDGMENT

본 연구는 한국연구재단 논문연구과제 (2021R1F1A1047271 및 2020R111A3066363) 지원으로 수행되었습니다.

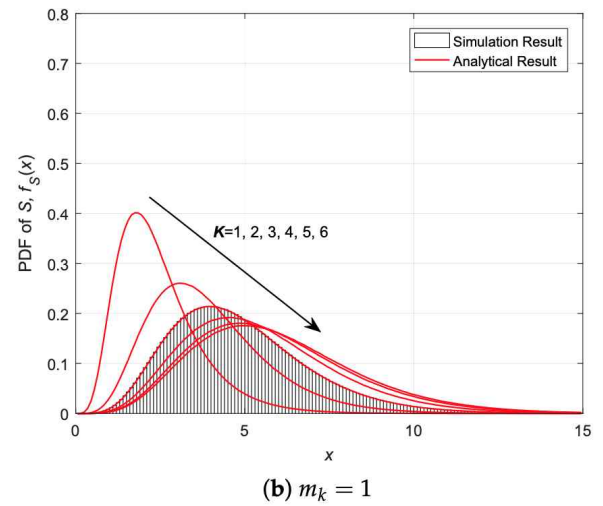
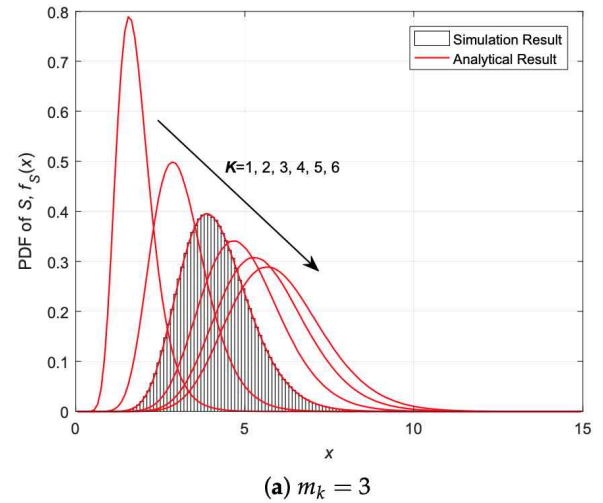


그림 1. PDF of  $S$  for various values of  $K$  when  $M=6$  and  $\bar{\gamma} = 1$

### 참고 문헌

- [1] H. A. David, Order Statistics. New York: Wiley, 1981.
- [2] S. Nam, M.-S. Alouini, and H.-C. Yang, "An MGF-based unified framework to determine the joint statistics of partial sums of ordered random variables," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 56, no. 11, pp. 5655-5672, 2010.
- [3] S. Nam, H.-C. Yang, M.-S. Alouini, and D. I. Kim, "An MGF-based unified framework to determine the joint statistics of partial sums of ordered i.i.d. random variables," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 62, no. 16, pp. 4270-4283, 2014.
- [4] J. Kim, M. Di Renzo, H. Liu, P. V. Orlik, and H. V. Poor, "Performance analysis of distributed single carrier systems with distributed cyclic delay diversity," IEEE Trans. Commun., vol. 65, no. 12, pp. 5514-5528, 2017.
- [5] --, "Diversity gain analysis of distributed CDD systems in non-identical frequency selective fading," in IEEE International Conference on Communications (ICC), 2018, pp. 1-6.